Transport, turbulence et lois d’échelle

Stéphan Fauve

Journée scientifique sur le thème des TIPE 2019: « transports »
Ecole normale supérieure, Samedi 24 Mars 2018

Plan

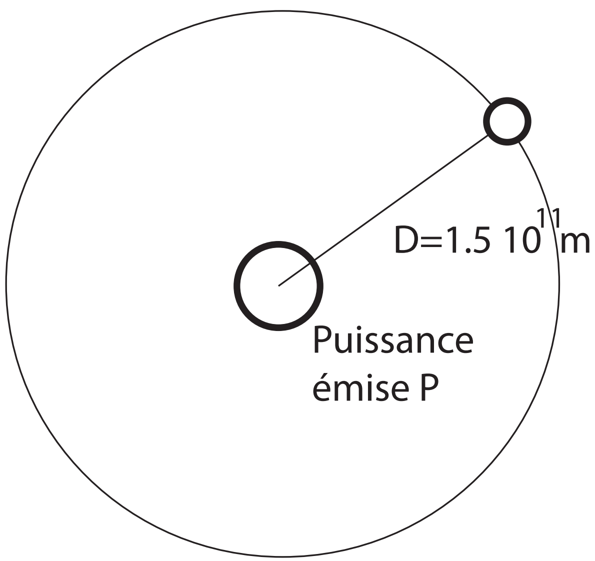
- Modes de transport de l’énergie : illustration à partir des échanges énergétiques de la Terre
  - Soleil (radiation)
  - Vents et courants (convection)
  - Cycle des précipitations (convection avec changement de phase)
  - Géothermie (diffusion)

- Lois d’échelle de la diffusion
  - Aspects microscopiques
  - Equation de diffusion (loi de conservation)
  - Analyse dimensionnelle et lois d’échelle

- Transport turbulent
  - Diffusivité de Taylor
  - Régimes sous- super-diffusifs (le spectre à fréquence nulle)
  - Advection-diffusion (transport turbulent versus diffusivité moléculaire)
  - Loi de Richardson (transport par la turbulence en zone inertielle)

Puissance reçue du soleil (Rayonnement)

- Un corps chauffé à température T rayonne des ondes électromagnétiques autour d'une fréquence ν telle que: $h\nu \propto kT$
- La puissance par unité de surface émise dépend de kT, c et h: $P_S \propto (kT)^4/h^3c^2$



Puissance reçue par unité de surface $P/4\pi D^2$

Pour estimer la puissance P émise par le soleil, comparer le soleil à distance D avec une lampe à incandescence de 100 W à distance d=0.1 m:

$P = 100\,(D/d)^2 \sim 100\ 1.5^2\ 10^{24} \sim 2\ 10^{26}$ W

Puissance reçue par la terre $P_T = (P/4\pi D^2)\ \pi R^2$

$P_T \sim 10^{17}$ W

Soit approximativement 340 W/m^2

- Le rayonnement thermique transporte également de l'entropie

Vents (Convection)

Différences de température → vents

- Estimation de l'énergie cinétique des vents dans l'atmosphère

Masse de l'atmosphère par unité de surface:

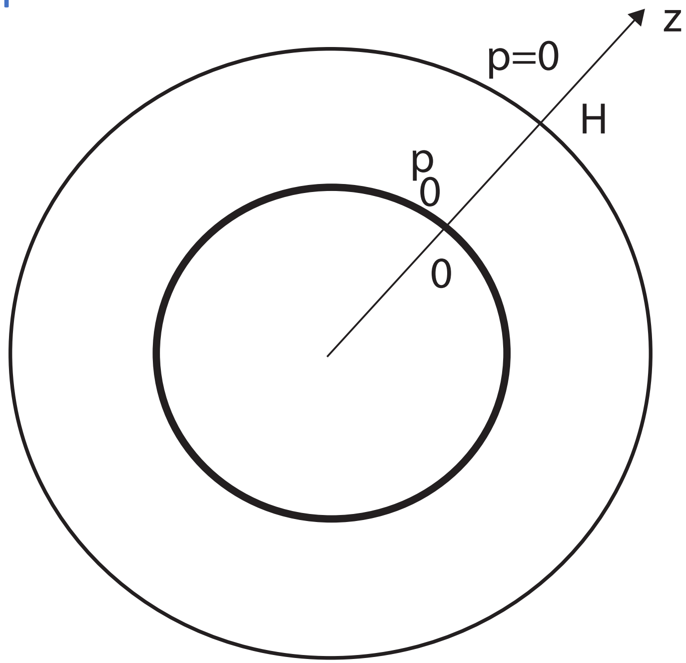
$\int_0^H \rho dz = - \int_{p0}^{0} dp/g = p_0/g \sim 10^4\ kg/m^2$

Vitesse moyenne des vents: 20 m/s

→ Energie cinétique par surface: $E_S \sim 2\ 10^6\ J/m^2$

- Estimation de la puissance: temps typique: 24 h $\sim 10^5$ s

→ Puissance 20 W/m^2 soit: $P_{vents} \sim 10^{15}\ W$



Précipitations (Convection avec changement de phase)

- Evaporation de l'eau des océans → nuages → pluie

Estimation de la puissance nécessaire au cycle des précipitations

En moyenne 1m de pluie par an ($3\ 10^7$ s)

Chaleur latente de l'eau : $L_v \sim 2\ 10^6$ J/kg

$P_{cs} \sim 2\ 10^6\ 10^3 / 3\ 10^7 \sim 66$ W/m^2, soit $P_c \sim 3\ 10^{16}$ W

- Energie potentielle de l'eau dans les nuages ($H \sim 3$ km)

Rendement: $gH/L_v \sim 1.5\ \% \ll \eta_C = 1 - T_2/T_1 \sim 10\ \%$

- Puissance hydroélectrique maximale

$P_h \sim P_c\, gh/3L_v \sim P_c\,(4000/6\ 10^6)$ soit $P_h \sim 2\ 10^{13}$ W

Géothermie (Diffusion de chaleur)

- Accrétion d'éléments denses vers le centre de la terre → perte d'énergie potentielle
- Eléments radioactifs

→ Température dans la croute terrestre: 20°C/km

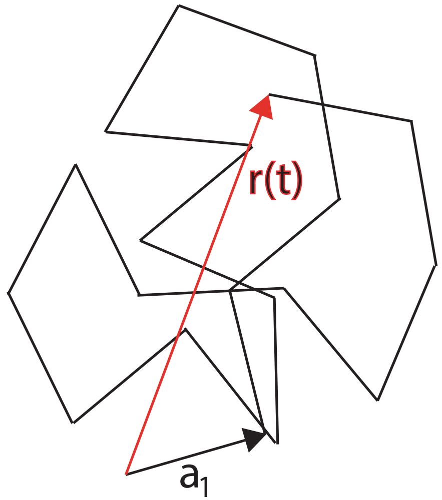
- Conductivité thermique de la croute: $\lambda = 4$ W/°C m s

Loi de Fourier: $P_{GS} = \lambda\ \Delta T/d \sim 0.08$ W/m^2 soit $P_G \sim 4\ 10^{13}$ W

Aspect microscopique de la diffusion

- Diffusion d'une tache constituée de particules de colorant

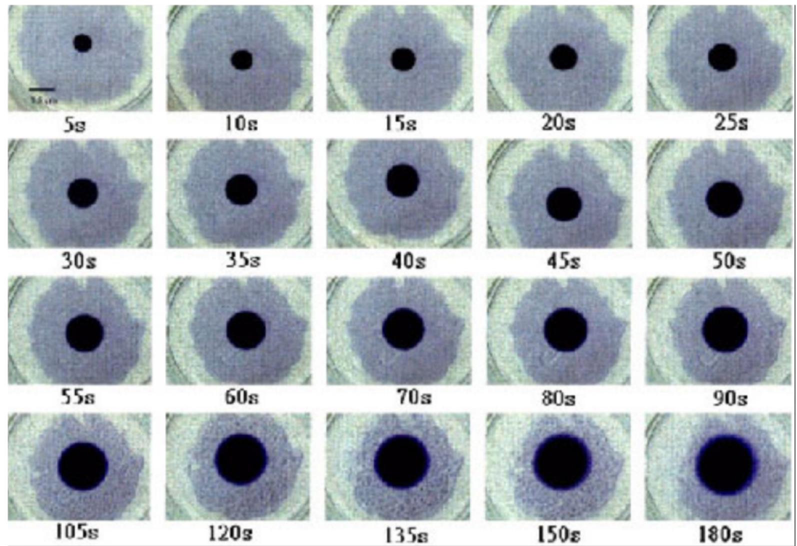
→ chaque particule suit une marche au hasard



$$\mathbf{r}\,(t) = \sum \mathbf{a}_i \;\Rightarrow\; <\mathbf{r}> = 0$$

$$\mathbf{r}^2(t) = \sum \mathbf{a}_i{}^2 + 2 \sum_{i<j} \mathbf{a}_i\,\mathbf{a}_\mathbf{j} \;\Rightarrow$$

$$<\mathbf{r}^2(t)> \propto n\, a^2 = (a^2/\tau)\; t = Dt$$



Le rayon de la tache croit comme la racine du temps. D est la diffusivité $[L]^2/[T]$

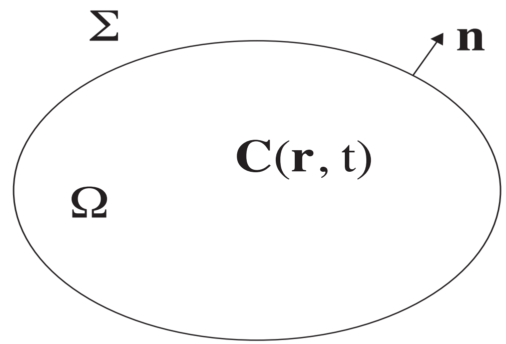
$$D \sim a\,(a/\tau) \sim a\, v_0$$

Loi de conservation et équation de diffusion

- Conservation du nombre de particules (de la masse, la charge, etc)

C(**r**, t) : concentration d'un colorant [M]/[L]^3

j (**r**, t) : flux de colorant par unité de surface [M]/([L]^2[T])



$$\frac{d}{dt}\int_\Omega C d^3r = -\int_\Sigma \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma = \int_\Omega \frac{\partial C}{\partial t} d^3r = -\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{j}\, d^3r$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$$

- Loi de Fourier

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \simeq -D\,\nabla C(\mathbf{r},t)$$

- Equation de diffusion

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\,\nabla^2\, C(\mathbf{r},t)$$

Lois d'échelle de la diffusion

- $C(r, t) = f(r, t, D, M)$ où $M=\int C(r, 0)\, d^3 r$: masse initiale de colorant

$[M]/[L]^3$, $[L]$, $[T]$, $[L]^2\,]/[T]$, $[M]$

- $C(r, t)\,(Dt)^{3/2}/M = f(r, t, D, M)\,(Dt)^{3/2}/M = g(r, t, D, M) = h(r/(Dt)^{1/2}, t, D, M)$

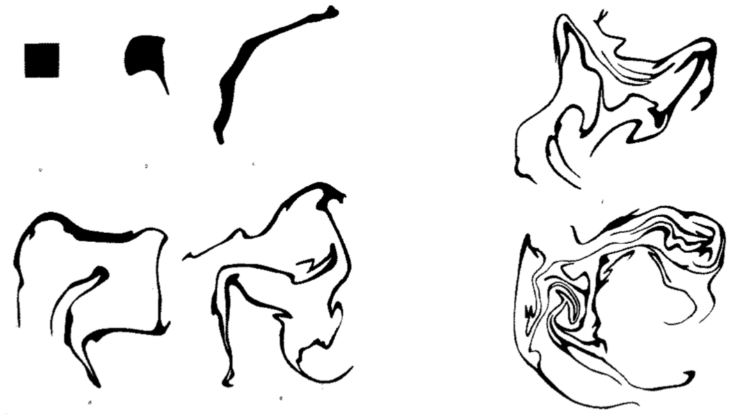
Si on change les unités, le membre de gauche ne change pas. Dans le membre de droite $r/(Dt)^{1/2}$ ne change pas.

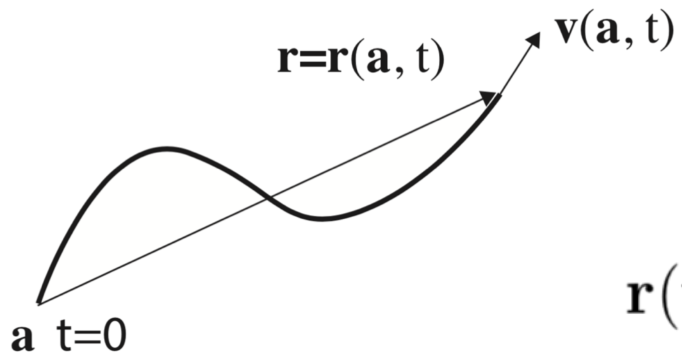
Donc $C(r, t) = [M/ (Dt)^3]\; h(r/(Dt)^{1/2})$

On retrouve que $r^2 \propto Dt$

Diffusivité de Taylor

- Diffusion d'un colorant par un écoulement turbulent (v(t) stationnaire)





$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t')\,dt'$$

- $<v> = 0 \Rightarrow <\mathbf{r}> = 0$

- $$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < r^2 > &= 2\langle rv\rangle = 2\int_0^t < v(t)v(t') > \; dt' = 2\int_0^t < v(t)v(t-\tau) > d\tau \\ &= 2\int_0^t < v(\tau)v(0) > d\tau \end{aligned}$$

Diffusion normale ou anormale

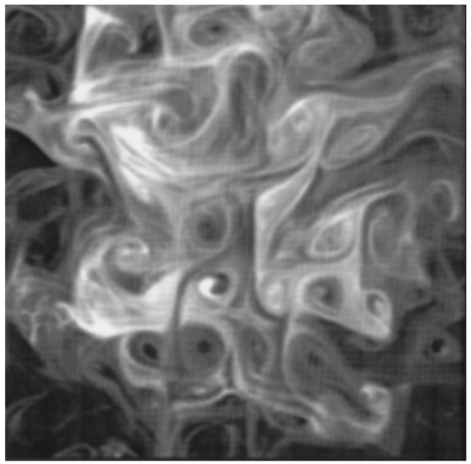
- Si l'intégrale existe lorsque t → ∞

$$2\int_0^\infty < v(\tau)v(0) > d\tau = u_0^2\,\tau_c$$

Alors $<r^2> \propto D_T\, t$ avec $D_T = u_0^2\,\tau_c$ → diffusion normale: $S_v\,(\omega=0) \neq 0$

(propriété aux temps longs, donc $\omega \rightarrow 0$)

- Si l'intégrale se comporte comme t^α avec $\alpha \neq 0$ → diffusion anormale
    - Trappes → sous-diffusion
    - Ecoulements cellulaires → superdiffusion



Advection - diffusion

- Tant que l'on néglige la diffusivité moléculaire D, on a

  C(r, t) = C(a, 0) avec r=r(t, a)

  Il n'y a pas strictement de diffusion mais les gradients de concentration deviennent de plus en plus grands sous l'effet de l'écoulement

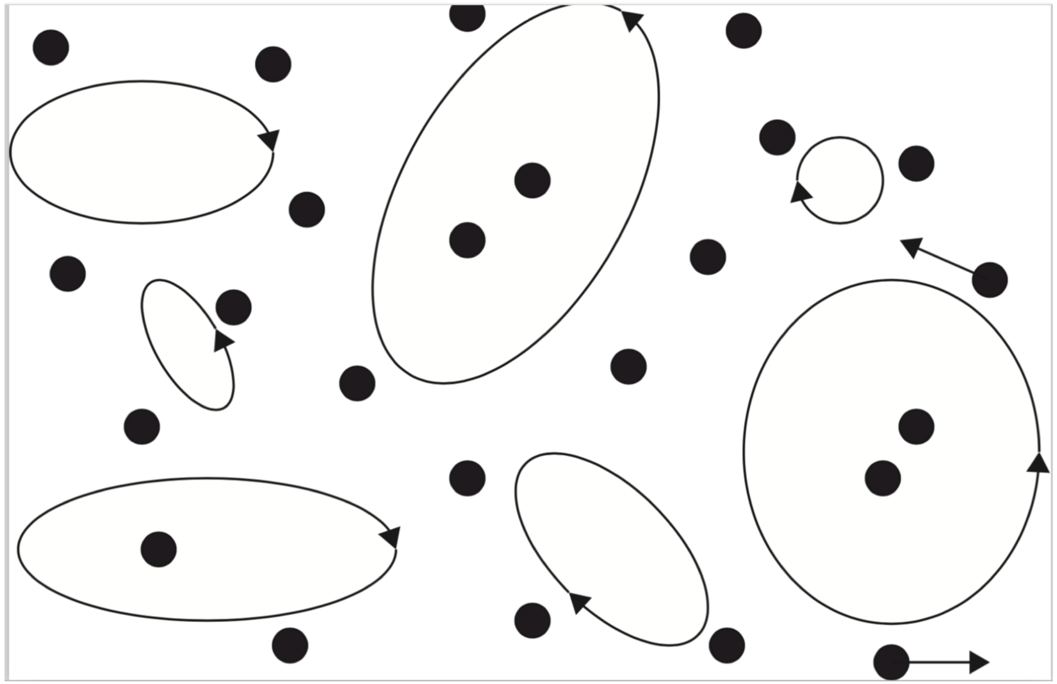
- Equation d'advection-diffusion : **u**(**r**, t) vitesse Eulérienne

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla C(\mathbf{r}, t) = D\, \nabla^2\, C(\mathbf{r}, t)$$

L'écoulement engendre des gradients importants; la diffusivité moléculaire assure l'homogénéisation à petite échelle spatiale où le terme avec le plus de dérivées est dominant

Dispersion de Richardson

- Un écoulement turbulent possède des corrélations de vitesse décrites par la loi de Kolmogorov → effet sur la diffusion



Les structures spatiales de l’écoulement vont disperser efficacement des paires de particules à leur échelle

Ecoulement turbulent

Equation de Navier-Stokes : $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Paramètres :	L taille typique de l'écoulement	[L]
	V vitesse typique de l'écoulement	[L]/[T]
	ρ densité du fluide	$[M]/[L]^3$
	ν viscosité du fluide	$[L]^2/[T]$

On remplace V par ε flux d'énergie par unité de masse

$\varepsilon = V^3/L$ $\qquad [L]^2/[T]^3$

ε est la puissance par unité de masse fournie à l'écoulement par le forçage (indépendant de ν)

Loi de Kolmogorov

- Echelle de dissipation par viscosité : η fonction de ε $[L]^2/[T]^3$ et ν $[L]^2/[T]$
  $\eta \propto (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \propto (\nu/VL)^{3/4} L \propto L\, Re^{-3/4}$
  $Re = VL/\nu$ nombre de Reynolds

- Zone inertielle

Lorsque Re élevé, il existe un intervalle de longueurs l étendu telle que $\eta << l << L$
Dans cette zone inertielle, on suppose que l'écoulement ne dépend pas de L ni de η

- Incrément de vitesse sur une échelle l ne dépend donc que de l et ε

$<v(l) - v(0)> \propto (\varepsilon\, l)^{1/3}$

- $E(k) \propto \int <[v(l) - v(0)]^2> e^{-ikl}\, dl \propto \int (\varepsilon\, l)^{2/3} e^{-ikl}\, dl \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \int x^{2/3} e^{-ix}\, dx \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$

Loi de Richardson

- En utilisant la formule de Kolmogorov pour l'incrément de vitesse sur une distance l

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} l^2 &= 2lv = 2\epsilon^{1/3} l^{4/3} \\ l^{2/3} &= \frac{2}{3} \epsilon^{1/3} t \end{aligned}$$

- Loi de Richardson

$\langle r^2 \rangle \propto \varepsilon\, t^3$ super-diffusion

(que l'on retrouve dimensionnellement)

Ce comportement laisse la place à la diffusion de Taylor lorsque les paires de particules sont à des distances supérieures à L